♦2.2.17. FUNDAMENTOS DE GEOMETRÍA COMPUTACIONAL (3º) (Ingeniero T. en Informática de Gestión)

Segundo cuatrimestre. Tercer curso. Ingeniería Informática e Ingeniería Técnica de Gestión.

Dos asignaturas corresponden al perfil de Geometría Computacional, una de ellas en Ingeniería Técnica de Gestión (Fundamentos de Geometría Computacional) y otra en Ingeniería Informática. Ambas tratan de presentar al alumno las principales características de esta disciplina. Aunque existen algunas diferencias entre ellas, las presentamos aquí de forma común.

Créditos: 6 créditos.
Profesor: Alberto Márquez. Despacho 60, segundo planta. Ed. Blanco.

Evaluación:
- Examen escrito 70%. Prácticas 30%.
- La realización de las prácticas son obligatorias.
- La nota mínima del examen escrito necesaria para aprobar la asignatura es de 3,5 puntos sobre 10 posibles.

Contenidos:
Se pueden consultar una descripción de los contenidos.
- Localización en subdivisiones.
- Problemas de proximidad.
- Diagramas de Voronoi.
- Triangulaciones.
- Convexidad. Cierre convexo.
- Intersecciones de objetos geométricos.

Bibliografía:

- J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Second Edition, Cambridge University Press, 1998.
- Mark de Berg, et al., *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer Verlag, 1997.
- F. P. Preparata and M. I. Shamos, *Computational Geometry*, Springer-Verlag, 1985.
- J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, 1987.
- J. E. Goodman and J. O'Rourke, Eds., *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, Boca Raton, 1997.
- Ming C. Lin and Dinesh Manocha, (Eds.), *Applied Computational Geometry*, Springer-Verlag, 1996.

Al margen de lo anteriormente comentado, existe una gran cantidad de información en la red, se puede consultar, por ejemplo las páginas de Geometría Computacional.

Descripción de las Asignaturas de Geometría Computacional

Un enorme número de aplicaciones y problemas ha posibilitado el nacimiento de la disciplina hoy conocida como Geometría Computacional, ya que todos ellos son intrínsecamente problemas geométricos que necesitan algoritmos eficientes para su resolución. Algunos de estos problemas pueden ser: el del viajante (en su versión euclídea), árboles recubridores minimales, la linea oculta y muchos problemas de programación lineal. Estudios algorítmicos de estos y otros problemas han aparecido en los últimos 150 años con especial intensidad en los últimos 30 años. Sin embargo, sólo muy recientemente han sido realizados estudios sistemáticos de algoritmos geométricos y cada día más investigadores se sienten atraidos por la disciplina que fue bautizada en 1975 por Shamos. A pesar de la naturaleza continua que se observa en los problemas planteados, los métodos, el tratamiento de datos y las respuestas tienen un carácter intríseco discretos, ya que, si bien un polígono es un ente continuo, puede ser definido mediante una serie finita de vértices y propiedades expresables también finitamente.

Dada la limitación a 6 créditos, es obligado en esta asignatura ver sólo una panorámica general, siendo imposible tratar todos los temas recogidos en los clásicos de la materia existentes. Así, hemos escogido tres temas que tienen una gran relación entre sí, son básicos para introducirse en otras cuestiones (como la geometría de rectángulos, esqueletos, búsqueda geométrica, etc.) y tienen un alto grado de aplicabilidad. También por las mismas razones apuntadas antes, hemos preferido limitarnos en la gran mayoría de los problemas al caso del plano, siendo ésta, en cualquier caso, una restricción común en la mayoría de los libros o artículos sobre la materia.

1.- Introducción y localización

No son demasiados los preliminares geométricos necesarios para abordar esta asignatura, pero en cualquier caso, como por desgracia la geometría aparece cada vez más arrinconada en los planes de estudio a todos los niveles (es muy posible que un licenciado en matemáticas en la actualidad no conozca ninguna demostración del teorema de Pitágoras, por ejemplo. Por no hablar de los problemas de Apolonio, de ciertas construcciones con regla y compás, etc.), es necesario dar un pequeño repaso a algunos de los conceptos que más tarde vamos a utilizar.

Así, después de un breve repaso de las nociones de plano y espacio euclídeo veremos el concepto de aplicación lineal y siguiendo el modelo propuesto por Klein en 1872, sumarizaremos como la clasificación de las aplicaciones lineales permite una división de la geometría en sus diversas ramas y así hablaremos de geometría afín cuando la incidencia es el único invariante ya que nos encontremos con una aplicación lineal definida por una matriz arbitraria no singular o exigiendo más propiedades a la matriz podemos llegar hasta la geometría euclídea donde la distancia es invariante.

Algorítmicamente, nos será de especial utilidad conocer el concepto de dualidad ya que, a veces (ejemplos particulares pueden ser en algunos problemas de proximidad o cuando demos ejemplos de programación lineal), puede ser más sencillo resolver un enunciado sobre intersección de rectas que su dual sobre puntos, siendo éste más interesante o viceversa. Esto nos proporcionará además una herramienta poderosa a la hora de dar cotas mínimas para los problemas considerados (además de la muy utilizada de ordenación de números) que es el de la pertenencia a un subconjunto del espacio euclídeo en función del número de componentes de dicho conjunto.

El primer gran problema de Geometría Computacional que estudiamos será el dado una subdivisión del plano originada por la inmersión de un grafo (en general será una inmersión donde las aristas se representan por segmentos rectilíneos) y dado un punto en el complementario del grafo, determinar en cuál de las regiones del plano está localizado el punto. El estudio de este problema es interesante ya que permite observar técnicas que se utilizarán a lo largo del curso. Por ejemplo: aún estudiando el caso simplificado de la inclusión en un polígono, el mejor resultado que se obtiene con una primera aproximación es, con la utilización del teorema de Jordan, un algoritmo que corre en tiempo lineal. Y esto es lo mejor que se puede obtener si no consideramos preprocesamiento, pero si los datos de la subdivisión podemos manipularlos y estructurarlos a nuestra conveniencia con anticipación (estructuración que nos será útil cuando volvamos a preguntarnos la inclusión de otro punto distinto) vemos que la inclusión en un polígono convexo o estrellado se puede hacer en tiempo logarítmico. Ésta será una constante a lo largo de esta disciplina: tratar de encontrar un preprocesamiento de los datos que permita una más rápida respuesta a las preguntas que planteamos, alcanzándose, en algunos casos, resultados sorprendentes. En este sentido, en el mismo problema de la localización, se verá un método relativamente sencillo (el de la banda) que permite resolver el problema general planteado también en tiempo logarítmico. Ya en el desarrollo de este método se observa que el preprocesamiento de los datos permitirá obtener dicho tiempo logarítmico, a pesar que el número de regiones que tengamos sea de orden lineal.

Aunque es posible probar que este tiempo no se puede mejorar, ya que, en otro caso, podríamos insertar un número en su lugar en una lista ordenada en menor tiempo que la cota teórica, el método de la banda plantea el problema que la cantidad de datos a almacenar es muy alto (de orden cuadrático). Para solucionar este inconveniente se verán otros dos métodos; el primero o de la cadena, mejora el almacenamiento, pero para perder en procesamiento, mientras que el del trapezoide es óptimo tanto en procesamiento como almacenamiento.

2.- Proximidad e Intersecciones.

Puede considerarse ésta la parte fundamental del curso, donde más se explotarán técnicas geométricas de muy diversa índole para conseguir nuestros objetivos; igualmente, haremos uso intensivo de los resultados obtenidos en los temas anteriores, ya que para muchos problemas de proximidad se utilizaran métodos de localización para rematar la tarea.

Empezaremos esta parte con una lista de problemas muy diversos sin aparente conexión entre sí (triangulaciones, árboles minimales, vértice de una nube de puntos más cercano a un punto dado, etc.) aunque una solución algorítmica a muchos de dichos problemas no presentará especial dificultad, se puede justificar de manera sencilla que algún preprocesamiento pudiera mejorar los algoritmos obtenidos y solucionar los problemas a los que no habíamos dado solución. Este preprocesamiento no es otro que el asignar a cada punto de la nube inicial el lugar geométrico de los puntos que están más cercanos a él que a ningún otro de los puntos de la nube; la colección de estos lugares geométricos es conocido como diagrama de Voronoi (que toman su nombre del matemático ruso G. Voronoi que los estudió con cierta profundidad en un par de artículos sobre formas cuadráticas aparecidos en 1907 y 1908, aunque ya habían sido estudiados por Dirichlet en 1850) y al estudio de sus propiedades y a su construcción algorítmica dedicamos el primer tema de esta parte. Con respecto a su construcción, el algoritmo que expondremos en clase será el de divide y vencerás, por ser, entre los óptimos, el conceptualmente más sencillo ya que sólo se presentará algún problema cuando se construya la cadena separadora que nos permita unir dos subdiagramas (evidentemente, en el método de divide y vencerás, en último lugar hay que resolver el diagrama de Voronoi de dos puntos o de tres puntos, pero en el primer caso la solución la representa la recta mediatriz y en el segundo las tres mediatrices que se intersectan en el centro de la circunferencia que definen). El siguente tema estará dedicado a las aplicaciones del diagrama de Voronoi a los problemas vistos en la introducción de esta parte así como a otros. Haremos un especial hincapié en la construcción de envolventes convexas, aunque, en la mayoría de los casos, éstas sean más fáciles de construir por otros procedimientos más directos, por lo cual se hace necesario un repaso a dichos métodos; en concreto, a dos de ellos: el divide y vencerás y la marcha de Jarvis.

En este punto haremos una excepción a la limitación de problemas en el plano, para ver el resultado sorprendente y de gran belleza que nos permite obtener el dual del diagrama de Voronoi (que es la triangulación de Delaunay) a partir de la construcción de la envolvente convexa de una serie de puntos localizados en el espacio.

La importancia de desarrollar algoritmos eficientes que detecten intersecciones crece a medida que las aplicaciones industriales se hacen más y más sofisticadas: una imagen complicada puede contener más de cien mil vectores, una base de datos arquitectónica contiene, a menudo, millones de elementos, por no nombrar circuitos integrados. Dada la profundidad y desarrollo que ha alcanzado esta disciplina, sólo es posible dar una idea de algunos de los resultados principales. En concreto, dos de los problemas que trataremos serán los de la línea oculta y la superficie oculta, información fundamental en el diseño de gráficos por ordenador, ya que puede ocurrir que tengamos la información de los objetos que aparecen en nuestra imagen y su posición, pero si sus proyecciones sobre el plano de visión del observador se intersectan, hay que decidir que líneas o superficies eliminar o cuales aparecen ocultas por otras. Sin embargo, ya este problema es bastante complejo en sí y se hace necesaria alguna simplificación; así, empezaremos estudiando la intersección de semiplanos. Aunque los problemas de línea y superficie ocultos son suficientemente motivadores para todos estos subproblemas de intersecciones de entes geométricos concretos, el caso de intersección de semiplanos viene también motivado dadas sus aplicaciones clásicas a la programación lineal. El siguiente paso será el considerar la intersección de dos polígonos convexos, viéndose que una variante de uno de los algoritmos dados para el cálculo de la envolvente convexa, permite encontrar tal intersección. Para el problema general de intersección de polígonos, es necesario resolver el de intersección de segmentos para el cual daremos el algoritmo de Bentley-Ottman.

Mención aparte merece el problema de la descripción de arreglos de objetos geométricos, con el cual se terminará este curso.