Procesamiento de imágenes digitales (Topología Digital)

Asignatura optativa de quinto curso (6 créditos).

Profesor: Alberto Márquez
Horario: Lunes (8,30-10,30), Jueves (10,30-12,30) Primer cuatrimestre.
Se realizarán unas prácticas obligatorias que junto con el examen final determinarán la nota de la asignatura.

En esta Facultad de Informática y Estadística, y en especial en nuestro Departamento de Matemática Aplicada I, existe un interés muy alto por las aplicaciones gráficas del ordenador, son varias las asignaturas ofertadas de segundo ciclo en esta línea, teniéndose una continuación en tercer ciclo.

La Topología Digital, nacida a principio de los años setenta, es el estudio de las propiedades topológicas de las imágenes digitales. Proporcionando la fundamentación teórica para importantes operaciones de procesamiento de imágenes tales como: etiquetado y enumeración de componentes, detección de bordes, adelgazamiento, etc. Estas operaciones permitirán establecer las bases para los propósitos principales del procesamiento de imágenes que se pueden agrupar en tres importantes subáreas:

- *Digitalización y compresión:* convertir imágenes en entes matemáticos discretos de forma eficiente. En este sentido es de gran importancia el conseguir guardar la información con la menor cantidad posible de información.

- *Restauración y reconstrucción:* mejorar imágenes degradadas y sintetizarlas a partir de informaciones parciales.

- *Descripción y reconocimiento:* encontrar elementos en una imagen que permitan describirla y reconocerla entre una base de datos de imágenes previamente establecida.

Pasemos a continuación a comentar el programa propuesto para la asignatura.

Conceptos de topología general

Evidentemente, una de las bases matemática que permite la comprensión de los temas que vamos a introducir en esta asignatura, la constituye la topología general, siendo la otra la teoría de grafos de la cual el alumno ya ha recibido información a lo largo de su carrera. Por tanto, se impone efectuar una panorámica de algunos de los elementos de la topología general que permitan apreciar y comprender las técnicas y metodología que aplicaremos en el estudio de la topología digital.

Además de los espacios topológicos, el otro elemento fundamental de la topología general lo constituye las aplicaciones continuas que se definirán como aquellas tales que la imagen inversa de un abierto es también abierto. A través de la noción de continuidad se llegará a aplicaciones que nos proporcionen información más rica sobre los espacios topológicos como las inmersiones y, en particular, obtendremos los homeomorfismos que nos dará la noción de igualdad entre espacios topológicos.

Además de la conectividad, también se puede comprobar que el número de agujeros de los espacios que admita una inmersión en el plano es un invariante topológico llamado característica de Euler, toda vez que dicho invariante va a ser fácil de calcular en nuestro contexto y que la información que proporciona entronca con ramas muy poderosas de la topología como es la topología algebraica, además de la información que proporciona acerca de la forma de la figura, creemos importante nombrarlo en esta introducción de la topología general. De especial importancia es el teorema de la curva cerrada de Jordan, dado que lo necesitaremos para mostrar las paradojas de la adyacencia en topología digital.

Imágenes digitales

Una vez conocidos algunos de los principios y herramientas que proporciona la topología, podemos aventurar qué nos proporcionará en los distintos problemas que surgen en el procesamiento de imágenes y cuales son los análogos digitales que hemos de construir para poder usar dichas herramientas con efectividad; para ello también será importante comprender que las imágenes digitales son el reflejo de una escena real (o intentan serlo) en las cuales siempre se produce una pérdida de información y, a pesar de dicha pérdida, intentamos extraer la información que nos permita poder clasificarla, procesarla y manipularla en general.

El primer problema que nos encontramos es que no podemos dotar de estructura de espacio topológico al conjunto de los pixels de una pantalla de forma natural y tratando de reflejar las propiedades de la escena que representamos. Ya que, en principio, se podría pensar en recurrir a la topología discreta, pero, en ese caso, todas las figuras serían no conexas. Toda vez que habíamos visto que la conectividad es una de las propiedades topológicas que más información nos proporciona a la hora de distinguir entre espacios no homeomorfos, sería interesante que la imagen digital tuviera el mismo número de componentes (y puntos de corte) que la escena que representa. Para ello, definimos la adyacencia entre los puntos de la imagen digital. Con este concepto se llega a un primer modelo que nos permite representar las imágenes digitales mediante un grafo que tiene tantos vértices como pixels y donde la adyacencia está representada por aristas. En general, los vértices de la imagen estarán marcados como vértices negros y los que no pertenecen a la imagen como blancos.

Con la representación anterior, es posible dar la noción de camino, como camino en el grafo que nos permite representar nuestra imagen digital y, a partir de dicho concepto, podemos decir que una imagen es conexa si dados dos puntos negros cualesquiera, existe un camino de puntos negros que los une. En general, la determinación del tipo de adyacencia estará motivada por la naturaleza del problema que estemos estudiando, así como por los medios físicos utilizados en nuestro proceso de digitalización y representación. Toda vez que la representación de una imagen digital la hacemos a través de un grafo, y puesto que la noción de conexión coincide con la conexión en el grafo, podemos aplicar los algoritmos de conexión en grafos para las imágenes digitales; en particular, el método de la búsqueda por capas es especialmente adecuado para estudiar la conexión en imágenes digitales, aunque diversas variantes para recorrer ordenadamente los distintos puntos de una imagen serán vistas cuando tratemos las operaciones sobre imágenes digitales.

Operaciones y propiedades

A partir de la idea de camino se obtiene el concepto de curva cerrada digital, si queremos que la curva sea simple, se tiene que tener en cuenta que cada punto debe ser adyacente sólo con otros dos puntos de la figura y podemos observar que según el tipo de adyacencia obtenemos distintos tipos de curvas cerradas. En cualquier caso, surge un problema que será la primera paradoja con la que nos enfrentamos y que debemos solucionar: es posible que la digitalización de una curva cerrada simple (o de algo que visualmente nos parece una curva cerrada) no sea curva cerrada simple digital con ninguno de los modelos de adyacencia introducidos. Esto nos lleva a replantearnos los objetivos de la disciplina ya que observamos que una misma imagen digital puede ser la digitalización de escenas con distintas propiedades (topológicas, métricas, etc.), así que hemos de decir que pretendemos obtener las propiedades de una de esas escenas, de tal forma que reflejen razonablemente bien lo que ocurre en la mayoría de ellas. Dicha escena será el análogo continuo, que será una figura plana que se obtiene mediante una serie de reglas fijas a partir de la imagen digital. Con lo cual podemos concretar que el propósito de la topología digital es obtener las propiedades topológicas del análogo continuo que nos permitan su clasificación, manipulación y reconocimiento y para ello desarrollar algoritmos discretos sobre la representación de la imagen digital. Una de las propiedades topológicas más destacadas, a la que ya hicimos mención cuando tratábamos sobre la topología general, es el teorema de la curva cerrada de Jordan. Sin embargo, es fácil encontrar ejemplos de curvas digitales con la 8-adyacencia tales que su complemento tiene una sola componente conexa y otras curvas digitales que con la 4-adyacencia su complemento tienen más de dos componentes conexas. Ésta es la paradoja de la curva de Jordan. Para resolver esta paradoja se han presentado varios modelos desde principio de los años setenta. Tal vez el más aceptado es el presentado por Rosenfeld que considera distinto tipo de adyacencia para una imagen y su complemento; así se hablará de la (8,4)-adyacencia o de la (4,8)-adyacencia. Aunque existe otra posibilidad y que consiste en considerar grafos con distintos tipos de vértices que no sólo representan a los puntos de la imagen y su complemento, sino que también representan las distintas uniones entre estos vértices. Estos grafos son triangulaciones del plano y, por tanto, en ellos se verifica el teorema de Jordan.

Una vez visto que existen modelos sencillos en los cuales se verifica el teorema de Jordan, podemos definir una serie de elementos asociados a toda imagen digital plana. En primer lugar, consideraremos el borde de una imagen como el conjunto de puntos de la imagen que es 8-adyacente con algún punto que no está en la imagen. Existen diversos algoritmos sencillos para la detección y seguimiento de borde, algoritmos que son de gran utilidad para diversos problemas de tratamiento de imágenes como el de eliminación de bordes difusos.

Otra noción que utilizaremos más adelante y estrechamente ligada al teorema de Jordan así como a los bordes de una imagen es el árbol de adyacencia asociado a toda imagen digital, definido como aquel grafo que tiene tantos vértices como componentes tiene la imagen y su complemento y dos vértices están unidos si comparten un borde común. Evidentemente, en el caso de imágenes binarias, dicho grafo es siempre un árbol, árbol que está íntimamente ligado con importantes invariantes topológicos de la figura; así si ésta tiene una sola componente conexa, el número de hijos del vértice asociado a dicha componente, nos proporciona la característica de Euler de la figura. Sin embargo, el árbol de adyacencia proporciona más información en el caso de tener más de una componente, ya que nos dice como se encuentran relativamente cada una de las componentes con respecto a las otras y así se puede comprobar que si dos imágenes tienen el mismo árbol de adyacencia, comparten las mismas propiedades topológicas (aunque esto sólo ocurre así si estamos ante imágenes bidimensionales), siendo, por tanto, éste un instrumento válido para definir cuando una operación dada sobre una imagen preserva la topología. En este sentido consideraremos principalmente como operación el borrado de puntos de una imagen, para obtener otra más sencilla, pero nos interesará que las propiedades topológicas se conserven o, dicho en otros términos, que el árbol de adyacencia se conserve. Éstas son las llamadas operaciones de encogimiento.

Por lo dicho anteriormente, es evidente que un encogimiento se ha de realizar a través de puntos del borde, ya que, en otro caso, introduciríamos una componente nueva en el complemento de la imagen. No es difícil dar un algoritmo que recorra los bordes secuencialmente hasta reducir todas las componentes de la imagen a una especie de grafo (en realidad lo que estamos construyendo es el grafo dual geométrico del árbol de adyacencia). Dicho grafo, aunque conserva las propiedades esenciales de la figura original, no tiene porqué tener su mismo aspecto, para conseguir preservar el aspecto, necesitamos introducir algunos nuevos conceptos que sentarían las bases de los objetivos de la geometría digital, que, al igual que la topología digital trata de establecer los principios topológicos que subyacen en las representaciones mediante ordenadores de escenas reales, trata de fijar los principios métricos de las imágenes digitales. Sin embargo, la geometría digital se encuentra en un estadio de desarrollo mucho más primitivo que la topología digital; en parte porque no existe una digitalización adecuada de la métrica euclídea y así conceptos tan sencillos como el de circunferencia pueden no ser fáciles de tratar. En cualquier caso, se le pueden añadir restricciones a la operación de encogimiento que hemos definido de tal forma que no se eliminen puntos que estén en un pico de la figura, con ello se consigue que un segmento no se reduzca a un punto, sino que se quede como un segmento, esta operación se llama de adelgazamiento y al resultado final, que recuerda a la imagen original sobre todo si ésta es oblonga, se le llama esqueleto de la imagen. Es claro que una pequeña modificación del algoritmo de encogimiento nos permitirá obtener el esqueleto de la imagen, obteniéndose así una nueva imagen, mucho más sencilla por tener menos puntos, que comparte con la primitiva sus propiedades topológicas y, en gran medida, las métricas, facilitándose su clasificación e identificación en una base de datos previamente elaborada.

Los métodos descritos anteriormente son claramente secuenciales y, dado la cantidad de puntos que constituyen una imagen, en muchos casos lentos. Por ello, a mediados de los setenta surgió el interés, que aún perdura, por paralelizar dichas operaciones. Para conseguirlo, es necesario estudiar propiedades topológicas más especiales de puntos que nos permita un borrado en paralelo, en concreto, habrá que estudiar puntos con entornos muy específicos, consiguiéndose algoritmos que no sean lineales en el número de puntos (como ocurre con los secuenciales) sino con la distancia máxima entre el borde y el esqueleto.

A la hora de paralelizar los algoritmos de adelgazamiento, nos hemos encontrado con el concepto de distancia entre puntos de la imagen digital. Este concepto nos permitirá dar una pequeña idea de como comprimir la información necesaria para describir una imagen digital, por tanto, merece la pena que se observe que dicha distancia varía según el tipo de adyacencia que estemos considerando puesto que estaremos midiendo la distancia en grafos distintos aunque con los mismos vértices. A partir de dicha distancia podemos definir el concepto de bloque como un círculo contenido en la imagen, un bloque será maximal si no está contenido estrictamente en otro bloque y al conjunto de centros y radios de los bloques maximales se les conoce como MAT de la imagen (MAT proviene de medial axis transformation). No es difícil ver que el MAT de una imagen nos determina dicha imagen con un gran ahorro de información sobre la matriz de ceros y unos con la que hemos estado trabajando, siendo, por tanto, de gran utilidad a la hora de transmitir información. Se puede comprobar que modificaciones de los algoritmos de encogimiento nos proporciona el MAT de una imagen y que el conjunto de los centros de los bloques maximales es un subconjunto del esqueleto de la imagen con lo cual concluiremos el curso.

Programa

1. **Espacios topológicos**
   Espacio Topológico. Conjunto abierto. Conjunto cerrado. Ejemplos de topología: discreta, indiscreta, Sierpinsky, subespacios. Topología euclídea en la recta y en el plano. Continuidad. Inmersiones. Homeomorfismo.

2. **Propiedades topológicas**
   Espacios conexos. Conexos en la recta. Caminos. Conexión por caminos. Componentes conexas. Puntos de corte. Característica de Euler. Teorema de la curva cerrada de Jordan.

3. **Imágenes digitales**
   Procesamiento de Imágenes. Escenas, imágenes e imágenes digitales. Adyacencias en imágenes bidimensionales. Adyacencia en imágenes tridimensionales. Representación de imágenes digitales.

4. **Conectividad**
   Caminos digitales. Conectividad en imágenes digitales. Algoritmos para determinar el número de componentes.

5. **Paradojas de la conectividad**
   Curvas cerradas. Análogo continuo. Teorema de la curva cerrada de Jordan. Conectividad de una imagen y su complemento. Bordes. Detección de bordes. Seguimiento de bordes. árbol de adyacencia. Característica de Euler.

6. **Adelgazamiento**
   Preservar la topología. Operaciones que preservan la topología. Puntos simples. Encogimientos. Geometría digital. Adelgazamiento. Esqueletos. Algoritmos de adelgazamiento. Adelgazamiento en paralelo

7. **Reconstrucción de imágenes**
   Distancias en imágenes digitales. MAT. Reconstrucción de imágenes. MAT y esqueleto.

References

[1] Gonzalez, R.C.- Woods, R.E. Digital Image Processing. Addison-Wesley, 1992.

Es un libro muy completo y con muchos ejemplos prácticos, siendo tal vez éste su mayor defecto ya que, en algunas ocasiones, los fundamentos matemáticos no están bien tratados.

[2] Jähne, B. Digital Image Processing. Springer Verlag, 1997.

Es un libro que cubre una gran cantidad de temas (más de los que se tratan en este curso), desde un punto de vista muy algorítmico.

[3] Jähne, B. Practical Handbook on Image Processing. CRC, 1997.

Es un libro enfocado desde un punto de vista mucho más de consulta ocasional que como un libro de texto.

[4] Rosenfeld, A. Picture Languages. Academic Press, 1979.

Es un libro muy bueno que toca temas interesantes pero que quizás sea demasiado específico.

[5] Rosenfeld, A- Kak, A.C. Digital Picture Processing (2 volúmenes). Academic Press, 1982.

La extensión de los contenidos y la adecuada profundidad que realiza de los tratamientos de los problemas lo hacen muy recomendable.